

Die optimale Milchtüte – Extremwertbestimmungen in der Praxis



Facharbeit in Mathematik
von Vincent Meiser
Soest, Februar 2002

Schule: Städt. Archigymnasium Soest

Schuljahr: 2001/2002

Kurs: Leistungskurs 2

Fach: Mathematik

Name des Schülers: Vincent Meiser

Thema der Facharbeit: Die optimale Milchtüte – Extremwertbestimmungen in der Praxis

Name des Fachlehrers: Herr Eisen

Ausgabetermin des Themas: 22.01.2002

Abgabetermin der Facharbeit: 05.03.2002

(Unterschrift des Schülers)

(Unterschrift des Lehrers)

Inhaltsverzeichnis

<u>Inhalt</u>	<u>Seite</u>
Inhaltsverzeichnis	1
Vorwort	2
Einleitung	3
Mögliche Tütenformen	4
Ansatz 1	5 - 8
Ansatz 2	9 - 12
Ansatz 3	13 - 17
Auswertung/ Gesamtergebnis	18
Nachwort	19
Quellenverzeichnis	20
Erklärung	21
<u>Anhang</u>	22 - 31
Planskizze Ansatz 1	22
Planskizze Ansatz 2	23
Planskizze Ansatz 3	24
Funktionsgraph Ansatz 1	25
Funktionsgraph Ansatz 2	26 + 27
Funktionsgraph Ansatz 3	28
Photos der Milchtüten (Ansatz 2 und 3)	29 - 31

Vorwort

Zu Beginn der Facharbeit will ich kurz auf meine Motivation für das Thema „Die optimale Milchtüte“ zusprechen kommen. Wichtig war für mich im Vorfeld der Arbeit der Bezug zur Praxis und Anwendung im wirklichen Leben. Die Milchtüte bietet diesen Bezug zur Anwendung und ist nicht bloß theoretische Mathematik, wie sie größtenteils im Unterricht vorkommt. Weitere Themen hätten auch die Streichholzschachtel oder das klassische Autobahnkreuz sein können. Diese Themen erschienen mir jedoch als zu wenig umfangreich bzw. zu komplex. Mit der Milchtüte habe ich ein Thema gewählt, von dem ich denke, dass es meinen Fähigkeiten nach angemessen ist.

Einleitung

Das Thema „Die optimale Milchtüte“ beinhaltet viele verschiedene Gesichtspunkte, nach denen eine Milchtüte optimiert werden kann. Neben einer Berechnung der Materialminimalität könnten die Handlichkeit der Tüte, die Größe der Werbeflächen auf der Tüte oder auch die Öffne- und Wiederverschließmöglichkeit eine Rolle spielen. Es können jedoch von den Herstellern nicht alle Aspekte gleich stark berücksichtigt werden, so dass bei der Herstellung der Materialaufwand eine übergeordnete Rolle spielt. Dafür ausschlaggebend sind die Materialkosten, da in der Massenproduktion schon geringe Einsparungen an jeder einzelnen Tüte für den Hersteller einen wesentlich niedrigeren Kostenaufwand bedeuten. Die Milchtüte stellt auch ein ökologisches Problem dar. Aufgrund der Tatsache, dass der Großteil der Milchbehältnisse Einwegprodukte sind, ist es ratsam, die Milchtüte materialminimal zu fertigen. In der Facharbeit werde ich in einem ersten Teil eine Tütenform berechnen, die unabhängig von Herstellungsbedingungen optimal ist. Im zweiten Teil habe ich versucht zwei marktübliche 1-Liter-Milchtüten und deren Materialaufwand genauer zu veranschaulichen und auch einen Vergleich beider Tüten anzustellen. Grundlage des zweiten Teils der Arbeit sind die realen Herstellungsbedingungen – wie Klebekanten u.ä..

Mögliche Tütenformen

Um einen geringen Materialverbrauch zu erreichen, sind mehrere geometrische Formen der Verpackung möglich. Neben einer Kugel, die den minimalsten Materialverbrauch aufweist, könnte ein Zylinder gefertigt werden. Auch diese Form der Verpackung hat einen geringen

Materialverbrauch zur Folge. Ein rechteckiger Körper ist wiederum eine weitere Möglichkeit. Nun spielen die Handlichkeit, die Lagerung der Tüte und die Stabilität eine Rolle. Bei der Kugel sind alle Aspekte nicht ausreichend oder gar nicht gewährleistet. Im Kühlschrank würde eine kugelförmige Verpackung wegrollen, die Stabilität würde womöglich zu wünschen übrig lassen und bei der Lagerung wäre große Platzverschwendung eine unerwünschte Nebenwirkung. Im Falle des Zylinders ist der Materialverbrauch auch nicht so hoch, jedoch scheint ein rechteckiger Körper aufgrund der Stabilität, der guten Lagermöglichkeit und Handlichkeit die praktischste Form für eine Milchtüte zu sein. Deshalb wird die Milchtüte mit quadratischer Grundfläche Gegenstand der weiteren Betrachtungen sein.

Ansatz 1

Der erste Ansatz berücksichtigt ausschließlich die Materialminimalität der 1-Liter-Milchtüte mit quadratischer Grundfläche. Aspekte wie Stabilität, Handlichkeit und Öffne- und Wiederverschließmöglichkeit, die in der realen Herstellung beachtet werden müssen, spielen keine Rolle.

Fragestellung

Bei welcher Höhe h und Breite b ist der Materialverbrauch $M(b,h)$ einer Milchtüte (1000cm^3) mit quadratischer Grundfläche minimal? Gesucht ist eine Funktion in Abhängigkeit von den Variablen b und h , mit der sich der Materialaufwand der Milchtüte berechnen lässt.

Planskizze

(die Planskizze befindet sich im Anhang, Seite 22)

Aufstellen der Zielfunktion

$$M(b) = 3 \cdot b \cdot h + b \cdot (2 \cdot b + h)$$

Nebenbedingung

Ein Liter (1000cm^3) soll in die Milchtüte passen.

$$V = b^2 \cdot h, \quad V = 1000$$

$$b^2 \cdot h = 1000 \Leftrightarrow h = \frac{1000}{b^2}$$

Einsetzen der Nebenbedingung

Durch Einsetzen der Nebenbedingung fällt die Variable h heraus, nun steht die Funktion nur noch in Abhängigkeit von der Variablen b .

6

$$\begin{aligned} M(b) &= 3 \cdot b \cdot \frac{1000}{b^2} + b \cdot \left[2 \cdot b + \frac{1000}{b^2} \right] \\ &\Rightarrow \frac{3000 \cdot b}{b^2} + 2b^2 + \frac{1000 \cdot b}{b^2} \\ &\Rightarrow \frac{3000}{b} + \frac{1000}{b} + 2b^2 \end{aligned}$$

Die nun entstandene Materialfunktion lautet:

$$m(b) = \frac{3000}{b} + \frac{1000}{b} + 2b^2$$

Da die Breite b und die Höhe h aus Stabilitäts- und Handlichkeitsgründen mindestens 1cm groß sein sollten, muss für die Funktion ein geeignetes Intervall festgelegt werden.

$$1 \subseteq b \text{ und } 1 \subseteq h = \frac{1000}{b^2}; \quad 1 = \frac{1000}{b^2}, h = 1 \Leftrightarrow b \approx 32$$

Daraus ergibt sich: $1 \subseteq b \subseteq 32$

Die exakte Fragestellung lautet somit:

Für welche b ist $m(b) = \frac{3000}{b} + \frac{1000}{b} + 2b^2$ minimal über dem Intervall $[1;32]$? (Die graphische Lösung der Fragestellung finden sie im Anhang, Seite 25.)

Nullstellenbestimmung anhand der 1. Ableitung

Das Ergebnis dieser Fragestellung lässt sich anhand der Nullstellen der ersten Ableitung berechnen.

Die erste Ableitung lautet:

$$m'(b) = -\frac{3000}{b^2} - \frac{1000}{b^2} + 4b$$

Da ich durch die Anwendung der in der Schule gelernten Verfahren die Nullstellen der Ableitungsfunktion nicht bestimmen kann, wende ich das Intervallschachtelungsverfahren an, durch das ich die Nullstellen näherungsweise angeben kann.

7

Die Genauigkeit des Ergebnisses lege ich auf $\Delta b = 0,1$ fest, weil die Ables- und Stanzgenauigkeit bei etwa 1mm liegen.

Als Ausgangswert dient die Breite einer marktüblichen Milchtüte $b = 7$

$$m'(7) \approx -53,6$$

Das negative Vorzeichen verrät, dass die Nullstelle rechts von $b = 7$ liegen muss, deshalb nehme ich als nächsten Wert $b = 8$

$$m'(8) = -30,5$$

Der Wert $b = 8$ liegt immer noch deutlich im negativen Bereich, als weiteren Wert wähle ich

$$b = 10$$

$$m'(10) = 0$$

Mit dem Wert $b = 10$ erhalte ich die gewünschte Nullstelle.

Probe

Das vorhandene Ergebnis muss durch die zweite Ableitung überprüft werden:

$$m''(b) = \frac{6000}{b^3} + \frac{2000}{b^3} + 4$$

$$m''(10) = 12 > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

Nun setzte ich $b = 10$ in die Materialfunktion ein.

$$m(10) = 600$$

Da die zweite Ableitung mit $b = 10$ größer Null ist, was das Minimum bestätigt, und das Einsetzen von $b = 10$ in die Materialfunktion $m(b)$ den Wert 600 ergibt, liegt im Tiefpunkt $T(10/600)$ ein relatives Minimum. Relativ deshalb, weil man nicht davon ausgehen kann, dass außerhalb des Intervalls oder an den Randstellen kein Minimum zu finden ist. Auszuschließen ist die Möglichkeit eines anderen Minimums aber aufgrund der Tatsache, dass m'' auf dem Intervall $[1;32]$ positiv ist, dadurch m' streng monoton steigend ist und deshalb m auf diesem Intervall nur eine Nullstelle haben kann.

8

Randstellenprüfung

$$m(1) = 4002, \quad m(32) \approx 2173$$

Durch die Überprüfung der Randstellen kann dann völlig ausgeschlossen werden, dass auf dem Intervall $[1;32]$ ein anderes Minimum existiert.

Ergebnis/Auswertung

Für $b = 10$ ist $m(b) = \frac{3000}{b} + \frac{1000}{b} + 2b^2$ minimal über dem Intervall $[1;32]$. In $T(10/600)$

liegt das absolute Minimum über dem genannten Intervall.

Nach der Berechnung von $h = \frac{1000}{b^2} = 10$ lässt sich sagen, dass ein Würfel mit der

Kantenlänge 10cm die materialminimalste Milchtüte wäre (Materialaufwand: 600 cm²).

Natürlich nur unter den Voraussetzungen, dass die Grundfläche quadratisch ist und die realen Herstellungsbedingungen nicht berücksichtigt werden. Zu bemängeln wäre an diesem Verpackungstyp, dass er sehr unhandlich ist. Die Lagermöglichkeit wäre jedoch optimal, da

bei dieser Form der Milchtüte kein Platz verloren ginge. Diese Tütenform findet auf dem Markt wohl aufgrund der Unhandlichkeit keine Anwendung.

9

Ansatz 2

Im zweiten Ansatz berechne ich den optimalen (hier gleichbedeutend mit dem minimalen) und den realen Materialaufwand anhand einer marktüblichen 1-Liter-Milchtüte. Alle Herstellungsbedingungen wie Klebekanten, Bauchigkeit der Tüte und Faltstellen werden berücksichtigt. Die Vorgehensweise dieses Ansatzes ist ähnlich wie beim ersten Ansatz und deshalb nicht mehr in allen Einzelheiten erläutert.

Fragestellung

Bei welcher Breite und Höhe der Milchtüte ist der Materialaufwand minimal?

Planskizze

(die Planskizze und eine Abbildung der zu berechnenden Milchtüte befinden sich im Anhang, Seite 23 und 29)

Herstellungsbedingungen

Klebefalz rechts: 0,6cm

Klebefalz oben: 0,8cm

Klebefalz unten: 0,8cm

Aufstellen der Zielfunktion

$$\begin{aligned}M(b, h) &= (4b + 0,6) \cdot \left(h + 2 \cdot \frac{b}{2} + 1,6\right) \\ &= (4b + 0,6) \cdot (h + b + 1,6)\end{aligned}$$

Nebenbedingung

Eine Bauchigkeit der Milchtüte war nicht festzustellen, so kann ich davon ausgehen, dass der in der Funktion steckende Quader- Ansatz ($b^2 \cdot h$) richtig ist. (Auf das Problem der Bauchigkeit geht Ansatz 3 näher ein.)

$$V = b^2 \cdot h, \quad V = 1000$$

$$\text{also: } h = \frac{1000}{b^2}$$

10

Einsetzen der Nebenbedingung

$$M(b) = (4b + 0,6) \cdot \left(b + \frac{1000}{b^2} + 1,6\right)$$

Die Materialfunktion $m(b)$ lautet also:

$$\begin{aligned}m(b) &= \frac{4000b}{b^2} + 4b^2 + 6,4b + \frac{600}{b^2} + 0,6b + 0,96 \\ &= 4b^2 + \frac{600}{b^2} + \frac{4000}{b} + 7b + 0,96\end{aligned}$$

Da b und h aus Stabilitäts- und Handlichkeitsgründen mindestens 1cm groß sein sollten, muss ein geeignetes Intervall festgelegt werden.

$$1 \subseteq b \text{ und } 1 \subseteq h = \frac{1000}{b^2} \approx 32$$

Das für $m(b)$ geltende Intervall lautet $1 \subseteq b \subseteq 32$

Die exakte Fragestellung:

Für welche b ist $m(b) = 4b^2 + \frac{600}{b^2} + \frac{4000}{b} + 7b + 0,96$ minimal über dem Intervall $[1;32]$?

Nullstellenbestimmung

Zur Berechnung der Nullstellen leite ich die Funktion $M(b)$ ab, um mit dem verwendeten notwendigen Kriterium mögliche Minima zu erhalten.

$$m'(b) = -\frac{1200}{b^3} - \frac{4000}{b^2} + 8b + 7$$

Die Nullstellen errechnet man wieder mit Hilfe des Intervallschachtelungsverfahrens.

Als Ausgangspunkt liegt die reale Breite von $7,2\text{cm}$ nahe. Die Genauigkeit Δb lege ich auf $\Delta b = 0,1$ fest, da die Ablese- und Stanzgenauigkeit bei 1mm liegt.

$$m'(7,2) \approx -15,78 < 0$$

$$m'(8) \approx 6,16 > 0$$

11

Somit steht $b_{\text{opt}} \in [7,2;8] = I_1$ fest (b_{opt} = die optimale Breite)

$$m'(7,6) \approx -4,19 < 0; \Rightarrow b_{\text{opt}} \in [7,6;8] = I_2$$

$$m'(7,8) \approx 1,13 > 0; \Rightarrow b_{\text{opt}} \in [7,6;7,8] = I_3$$

$$m'(7,7) \approx -1,49 < 0; \Rightarrow b_{\text{opt}} \in [7,7;7,8] = I_4$$

$$m'(7,75) \approx -0,18 < 0; \Rightarrow b_{\text{opt}} \in [7,75;7,8] = I_5$$

Mit der festgelegten Genauigkeit steht $b_{\text{opt}} \approx 7,8$ als die Nullstelle fest.

Probe

$$m''(b) = \frac{2400}{b^2 \cdot b^2} + \frac{8000}{b^3} + 8$$

$$m''(7,8) \approx 25,5 > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$m(7,8) \approx 822$$

Randstellenprüfung

$$m(1) \approx 4612$$

$$m(32) \approx 4447$$

Ergebnis

Im Punkt $T(7,8/822)$ liegt das absolute Minimum der Funktion $m(b)$ auf dem Intervall $[1;32]$. Für die Milchtüte bedeutet dies, dass die optimale Breite der Tüte bei $7,8\text{cm}$ liegt.

Damit ist die optimale Höhe durch $h = \frac{1000}{b^2} \approx 16,44$, also durch $16,4\text{cm}$ angegeben. Der optimale, hier gleichbedeutend mit dem minimalen, Materialverbrauch liegt bei 822cm^2 .

Vergleich mit der realen Milchtüte

Es folgt ein Vergleich der gerade berechneten optimalen/ materialminimalen Milchtüte und der realen Milchtüte, aus deren Aufbau die Materialfunktion $m(b)$ abgeleitet wurde.

12

$b_{\text{opt}} \approx 7,8$; $h_{\text{opt}} \approx 16,4$; $m_{\text{opt}} \approx 822$;

Durch Abmessen der realen Milchtüte lässt sich $b_{\text{real}} \approx 7,1$, und daraus $h_{\text{real}} = \frac{1000}{b^2} \approx 19,8$ und $m_{\text{real}} \approx 828$ berechnen. Die reale Milchtüte ist $7,1\text{cm}$ breit und $19,8\text{cm}$ hoch. Die Herstellung erfordert 828cm^2 Pappe pro Tüte; das ist nur rund ein Prozent mehr Pappe, als für die optimale Milchtüte benötigt wird. Die Abweichung in der Breite der Tüte um $0,7\text{cm}$ ist schon deutlich bemerkbar, die Abweichung der Zielgröße/ des Materialverbrauchs aber ist unerheblich aufgrund des flachen Funktionsverlaufs im Bereich des Minimums (siehe Funktionsgraph im Anhang, Seite 26 und 27).

Ansatz 3

Der dritte Ansatz soll dazu dienen, eine weitere Milchtüte vorzustellen, die in der Praxis Anwendung findet. Sie ist etwas anders als die Tüte aus Ansatz 2 aufgebaut, vor allem durch eine andersartige Verschlußmöglichkeit.

Planskizze

(die Planskizze und eine Abbildung der zu berechnenden Milchtüte befinden sich im Anhang, Seite 24 und 29)

Herstellungsbedingungen

Klebefalz rechts: 1,5cm

Klebefalz oben: 1 cm

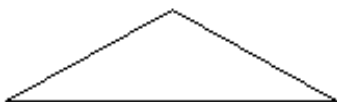
Klebefalzaufsätze oben: 0,7cm

Klebefalzaufsätze unten: 0,7cm

Bodenstücke: Breite: b; Höhe: $\frac{b}{2}$

Deckelstücke: Breite: b; Höhe: ?

Ermittlung der Höhe der Deckelstücke:



Wenn man sich die Milchtüte einmal von der Seite anschaut, ist das oben abgebildete gleichschenklige Dreieck zu sehen. Der 30°- Winkel ist von der Tüte, die als Vorlage diente,

übernommen worden. Bei der Halbierung des gleichschenkligen Dreiecks entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke, für die $\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ gilt.

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{b}{2}}{x} \Leftrightarrow \frac{b}{\sqrt{3}}$$

14

So steht die Höhe der Deckelstücke mit $x = \frac{b}{\sqrt{3}}$ fest.

Aufstellen der Zielfunktion

Unter Berücksichtigung der sieben Herstellungsbedingungen lässt sich nun die Zielfunktion $M(b, h)$ aufstellen.

$$M(b, h) = (4 \cdot b + 1,5) \cdot \left(h + \frac{b}{2} + \frac{b}{\sqrt{3}} + 1,7 \right)$$

Nebenbedingung

Die Nebenbedingung wäre eigentlich dieselbe wie in Ansatz 2: 1 Liter bzw. 1000cm^3 . Jedoch ist bei dieser Milchtüte eine Bauchigkeit festzustellen (siehe Anhang Seite 31). Der Quader-Ansatz, den ich vorausgesetzt habe, stimmt also gar nicht. Damit ich überhaupt weiter rechnen kann, mache ich einen Vereinfachungsschritt und nehme die Tüte bis zum Deckelansatz als Quader. Durch Nachmessen der realen Milchtüte komme ich so auf ein Gesamtvolumen von gerundet 955cm^3 .

Einsetzen der Nebenbedingung

Als Nebenbedingung setzte ich $h = \frac{955}{b^2}$ ein. Die veränderte Zielfunktion, jetzt nur noch in

Abhängigkeit von b stehend, lautet:

$$\begin{aligned} M(b) &= (4 \cdot b + 1,5) \cdot \left[\frac{955}{b^2} + \frac{b}{2} + \frac{b}{\sqrt{3}} + 1,7 \right] \\ &= \frac{3820b}{b^2} + \frac{4b^2}{2} + \frac{4b^2}{\sqrt{3}} + 6,8b + \frac{1432,5}{b^2} + \frac{1,5b}{2} + \frac{1,5b}{\sqrt{3}} + 2,55 \\ &= \frac{3820}{b} + 2b^2 + 2,3b^2 + 6,8b + \frac{1433}{b^2} + 0,75b + 0,87b + 2,6 \end{aligned}$$

$$= \frac{3820}{b} + \frac{1433}{b^2} + 4,3b^2 + 8,4b + 2,6$$

Ich habe bei der vorhergehenden Rechnung auf genügend genaue Dezimalzahlen gerundet, damit überhaupt weiter gerechnet werden kann. Daraus entsteht folgende Materialfunktion $m(b)$:

15

$$m(b) = 4,3b^2 + \frac{1433}{b^2} + \frac{3820}{b} + 8,4b + 2,6$$

Intervallbestimmung

Die Breite b und die Höhe h müssen aus Stabilitäts- und Handlichkeitsgründen mindestens 1cm groß sein. Deshalb gilt die Materialfunktion $m(b)$ für das folgende Intervall: $1 \subseteq b$

$$\text{und } 1 \subseteq h = \frac{955}{b^2} \approx 31$$

$$\Rightarrow 1 \subseteq b \subseteq 31$$

Nun lautet die exakte Fragestellung:

Für welche b ist $m(b) = 4,3b^2 + \frac{1433}{b^2} + \frac{3820}{b} + 8,4b + 2,6$ unter den genannten Voraussetzungen minimal über dem Intervall $[1;31]$?

Nullstellenberechnung

Anhand der Nullstellen der 1. Ableitung können mögliche Minima berechnet werden.

$$m'(b) = 8,6b + 8,4 - \frac{3820}{b^2} - \frac{2866}{b^3}$$

Wie bei Ansatz 2 sind mögliche Nullstellen nicht mit den üblichen algebraischen Verfahren zu errechnen. Das Intervallschachtelungsverfahren hilft weiter. Die Genauigkeit liegt wieder bei $\Delta b = 0,1$. Als Ausgangswert dient die reale Breite von 7cm .

$$m'(7) \approx -17,7 < 0$$

Die Nullstelle muss also rechts von $b = 7$ liegen:

$$m'(8) \approx 11,9$$

Daraus folgt: $b_{\text{opt}} \in [7;8] = I_1$; (b_{opt} = die optimale Breite)

$$m'(7,5) \approx -1,8 < 0; \Rightarrow b_{\text{opt}} \in [7,5;8] = I_2$$

$$m'(7,75) \approx 5,3 > 0; \Rightarrow b_{\text{opt}} \in [7,5; 7,75] = I_3$$

$$m'(7,65) \approx 2,5 > 0; \Rightarrow b_{\text{opt}} \in [7,5; 7,65] = I_4$$

$$m'(7,55) \approx -0,3 < 0; \Rightarrow b_{\text{opt}} \in [7,55; 7,65] = I_5$$

16

b ist mit der geforderten Genauigkeit $b \approx 7,6$

Probe

Mit der 2. Ableitung lässt sich das Ergebnis $b \approx 7,6$ bestätigen:

$$m''(b) = 8,6 + \frac{7640}{b^3} + \frac{9598}{b^2 \cdot b^2}$$

$$m''(7,6) > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$m(7,6) \approx 842$$

Damit liegt in $T(7,6/842)$ ein relatives Minimum. Um zu überprüfen, ob T das einzige Minimum auf dem Intervall $[1;31]$ ist, stellt man folgende Überlegung an. m'' ist auf dem Intervall immer positiv, also ist m' streng monoton steigend und so kann m' nur eine Nullstelle haben bzw. die Materialfunktion m nur ein Minimum, nämlich $T(7,6/842)$.

Randstellenprüfung

Die Randstellen sind jedoch noch zu prüfen, bevor T als einziges Minimum auf dem Intervall $[1;31]$ ausgewiesen werden kann.

Ergebnis

Für $b = 7,6$ ist $m(b) = 4,3b^2 + \frac{1433}{b^2} + \frac{3820}{b} + 8,4b + 2,6$ minimal auf dem Intervall $[1;31]$. In

$T(7,6/842)$ liegt das absolute Minimum des genannten Intervalls. Die materialminimale Milchtüte diesen Aufbaus hat eine Breite von $7,6\text{cm}$ und eine Höhe von $16,5\text{cm}$. Der Materialverbrauch liegt bei 842cm^2 . (Die graphische Lösung befindet sich im Anhang, Seite 28.)

Vergleich mit der realen Milchtüte

Ein Vergleich mit der realen Milchtüte dieser Bauweise ($b_{\text{real}} = 7,0\text{cm}$; $h_{\text{real}} = 19,5\text{cm}$; $m_{\text{real}} \approx 847\text{cm}^2$), ergibt, ähnlich wie bei Ansatz 2, dass die reale Milchtüte nur ein halbes Prozent mehr Material benötigt.

Die nur geringe Abweichung des Materialverbrauchs ist dadurch zu erklären, dass der Funktionsgraph im Bereich des Minimums relativ flach verläuft (siehe Anhang, Seite 28). Da die reale und die optimale Milchtüte in der Höhe ähnlich sind, tritt der Bauchigkeitseffekt bei beiden Tüten nahezu gleich stark auf. Der Vereinfachungsschritt bringt deshalb keine Ungenauigkeiten mit sich. Wäre die optimale Höhe viel kleiner oder größer als die Höhe der realen Milchtüte, wäre der Vereinfachungsschritt so nicht zulässig, weil je größer die Höhe ist, desto größer ist auch die Volumenveränderung, die durch den Bauchigkeitseffekt hervorgerufen wird.